Τεχνικές Επιμερισμένης Ανάλυσης

Εισαγωγή

Γενικά στην ανάλυση Δομών Δεδομένων και Αλγορίθμων μας ενδιαφέρουν κυρίως 3 περιπτώσεις ως προς την Πολυπλοκότητα:

- Πολυπλοκότητα Χειρότερης Περίπτωσης (Worst Case Complexity)
- Πολυπλοκότητα Μέσης Περίπτωσης (Average Case Complexity)
- Επιμερισμένη Πολυπλοκότητα (Amortized Complexity)

Επιμερισμένη Πολυπλοκότητα

- Σε αρκετές περιπτώσεις η πολυπλοκότητα μιας πράξης μπορεί να έχει μεγάλες διακυμάνσεις.
- Επίσης σε κάποια προβλήματα θέλουμε να φράξουμε το κόστος μιας ακολουθίας πράξεων και όχι καθεμία πράξη ξεχωριστά.
- Στην ανάλυση επιμερισμένης πολυπλοκότητας υπολογίζεται το συνολικό κόστος μιας ακολουθίας πράξεων και επιμερίζεται το κόστος αυτό σε καθεμία πράξη.

Τεχνικές Επιμερισμένης Ανάλυσης

Παρουσιάζονται 3 τεχνικές επιμερισμένης ανάλυσης:

1. Μέθοδος Άθροισης
2. Μέθοδος Τραπεζίτη
3. Μέθοδος Φυσικού

Μέθοδος Άθροισης

- Ακριβής εφαρμογή του ορισμού της επιμερισμένης πολυπλοκότητας.
- Για μια ακολουθία πράξεων, καταγράφεται το ακριβές κόστος, υπολογίζεται το άθροισμα, και τέλος αυτό διαιρείται με τον αριθμό των πράξεων.

Μέθοδος Φυσικού

- Σε κάθε στιγμιότυπο της δομής ανατίθεται μια συνάρτηση που λαμβάνει πραγματικές θετικές τιμές και ονομάζεται συνάρτηση δυναμικού.
- Η συνάρτηση δυναμικού πρέπει να μετρά την "ανοχή" της δομής σε ακριβές πράξεις, άρα όσο πιο μεγάλο το δυναμικό ενός στιγμιοτύπου μιας δομής, τόσο πιο ακριβή μπορεί να είναι μια πράξη σε αυτό.
- Οι φθηνές πράξεις πρέπει να αυξάνουν το δυναμικό, ενώ οι ακριβές να το μειώνουν.
- Το επιμερισμένο κόστος μιας πράξης φράσσεται άνω από το άθροισμα του πραγματικού κόστους συν το ποσό του δυναμικού που συνεισφέρει ή καταναλώνει.

Μέθοδος Φυσικού

Τυπικά:

- Δομή D
- Ακολουθία πράξεων $O_1, O_2, \ldots, O_m$ τέτοια ώστε η πράξη O_i να μετασχηματίζει τη δομή από τη φάση D_{i-1} σε D_i
- Υπάρχει μια μη μειούμενη συνάρτηση $\Phi(D_i)$ που αναθέτει πραγματικές τιμές στα στιγμιότυπα της δομής και $\Phi(D_0) = 0.$
- Η επιμερισμένη πολυπλοκότητα φράσσεται άνω από AC(O i) και δίνεται ως εξής:
  $AC(O_i) = T(O_i) + \Phi(D_i) - \Phi(D_i - 1)$, όπου $T(O_i)$ το πραγματικό κόστος της πράξης.

Μέθοδος Τραπεζίτη

- Ισοδύναμη της Μεθόδου Φυσικού
- Η δομή που αναλύεται σχετίζεται με ένα ‘τραπεζικό λογαριασμό’.
- Κάθε πράξη έχει ένα πραγματικό κόστος, και παράλληλα με αυτό ‘καταθέτει’ ή ‘αποσύρει’ χρήματα από το λογαριασμό.
- Κάθε πράξη πληρώνει ένα ποσό. Συνήθως οι φθηνές πράξεις πληρώνουν παραπάνω από το πραγματικό τους κόστος, ενώ οι ακριβές κάνουν ανάληψη, αρκεί να υπάρχει αρκετό υπόλοιπο στο λογαριασμό.
- Το επιμερισμένο κόστος δίνεται από το άθροισμα του πραγματικού κόστους της πράξης συν το ποσό που καταθέτει η αποσύρει από το λογαριασμό.

Μέθοδος Τραπεζίτη

Τυπικά:

- Δομή D
- Ακολουθία πράξεων $\mathrm{O}_1, \mathrm{O}_2, \ldots, \mathrm{O}_m$ τέτοια ώστε η πράξη O_i να μετασχηματίζει τη δομή από τη φάση D_{i-1} σε D_i
- Συνάρτηση $\mathrm{Bal}(\mathrm{D}_i)$ που αναθέτει πραγματικές θετικές τιμές στα στιγμιότυπα της δομής, και $\mathrm{Bal}(\mathrm{D}_0) = 0$.
- Η επιμερισμένη πολυπλοκότητα $\mathrm{AC}(\mathrm{O}_i)$ φράσσεται άνω από: $\mathrm{AC}(\mathrm{O}_i) = T(\mathrm{O}_i) + \mathrm{Bal}(\mathrm{D}_i) - \mathrm{Bal}(\mathrm{D}_i - 1)$, όπου $T(\mathrm{O}_i)$ το πραγματικό κόστος της πράξης.

Παράδειγμα - Δυαδικός Μετρητής

- Δυαδικός μετρητής $c =< b_k, b_{k-1}, \ldots, b_0 >$.
- Μοναδική επιτρεπτή πράξη είναι η $inc(c)$ δηλαδή η αύξηση του μετρητή κατά 1.
- Κάθε αλλαγή ψηφίου έχει κόστος 1.

Παράδειγμα - Δυαδικός Μετρητής

Μέθοδος Άθροισης:

- Το ψηφίο b_0 αλλάζει σε κάθε αύξηση, το b_1 αλλάζει σε κάθε δεύτερη αύξηση, το b_2 αλλάζει σε κάθε τέταρτη αύξηση κτλ.
- Κάθε αλλαγή κοστίζει $\mathrm{O}(1)$, άρα το b_0 έχει κόστος $\mathrm{O}(\mathrm{n})$, το b_1 έχει $\mathrm{O}({}^{n}/_{2})$, το b_2 έχει $\mathrm{O}({}^{n}/_{2^2})$ κτλ.
- Τελικά το κόστος για n αυξήσεις είναι: $\mathrm{C}(\mathrm{n}) = \mathrm{O}\left({}^{n}/_{2^0}\right) + \mathrm{O}\left({}^{n}/_{2^1}\right) + \mathrm{O}\left({}^{n}/_{2^2}\right) + \cdots = \mathrm{O}(\mathrm{n})$
- Το επιμερισμένο κόστος είναι $\mathrm{AC}\big(inc(c)\big) = \frac{\mathrm{O}(\mathrm{n})}{n} = \mathrm{O}(1)$

Παράδειγμα - Δυαδικός Μετρητής

Μέθοδος Τραπεζίτη:

- Η πολιτική χρέωσης είναι η εξής:
  - Πληρώνουμε 1 μονάδα κάθε φορά που μετατρέπουμε ένα 0 σε 1
  - Κάνουμε ανάληψη 1 μονάδας κάθε φορά που μετατρέπουμε ένα 1 σε 0
- Σε μια τυχαία αύξηση i :
  - k διαδοχικά 1 θα γίνουν 0, και το k-στο ψηφίο θα γίνει από 0 σε 1.
  - Το πραγματικό κόστος είναι k+1, γίνεται ανάληψη k μονάδων, και κατάθεση 1 μονάδας
- Άρα $\mathrm{AC}(inc(c)) = T(inc(c)) + Bal(\mathrm{D}_i + 1) - \mathrm{Bal}(\mathrm{D}_i) = \mathrm{k} + 1 - \mathrm{k} + 1 = 2 = O(1)$

Παράδειγμα - Δυαδικός Μετρητής

Μέθοδος Φυσικού:

- Η συνάρτηση δυναμικού είναι $\Phi(inc(c)) = \{\pi\lambda\eta\theta o\varsigma\ \tau\omega\nu\ \psi\eta\varphi\iota\omega\nu\ \mu\varepsilon\ \tau\iota\mu\eta\ 1\}$
- Σε μια τυχαία αύξηση i :
  - k διαδοχικά 1 θα γίνουν 0, και το k-στο ψηφίο θα γίνει από 0 σε 1.
  - Το πραγματικό κόστος είναι k+1, και ο συνολικός αριθμός των 1 μειώνεται κατά k-1 άρα η διαφορά δυναμικού $\Delta\Phi = -\mathrm{k} + 1$
- Άρα $\mathrm{AC}(inc(c)) = T(inc(c)) + \Phi(\mathrm{D}_i + 1) - \Phi(\mathrm{D}_i) = \mathrm{k} + 1 - \mathrm{k} + 1 = 2 = O(1)$